Estructuras Algebraicas Segundo examen parcial	1^{er} Apellido: ____________________ 2^{o} Apellido: ____________________ Nombre: ____________________ Número de matrícula:	30 de mayo de 2014 Tiempo 2 h. **Calificación:**
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid		

Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Indicar justificadamente cuáles son los elementos del anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\langle 4-i\rangle$ y calcular el cardinal del conjunto: $|\mathbb{Z}[i]/\langle 4-i\rangle|$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Se considera el anillo $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ donde las operaciones de suma y producto están definidas por $r \oplus s = r + s + 1$, $r \odot s = rs + r + s$. Estudiar si $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, siendo $+$ y $\cdot$ las operaciones usuales de suma y producto de números reales.

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Encontrar todos los homomorfismos de anillos $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$.
Para cada uno de ellos calcular su núcleo y su imagen.

Ejercicio 4 (2,5 puntos)

1. Determinar el polinomio mínimo de $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ sobre $\mathbb{Q}$
2. Obtener una base y el grado de extensión de $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})$ sobre $\mathbb{Q}$
3. Indicar justificadamente si existe una relación de igualdad o de contenido entre $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Soluciones

Ejercicio 1

$n \in \mathbb{Z} \cap \langle 4-i \rangle \Leftrightarrow$ existe $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $n = (a+bi)(4-i) = (4a+b)+(4b-a)i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 4a+b$ y $4b-a = 0 \Leftrightarrow$ existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 17b$. Es decir: $n \in \mathbb{Z}\cap\langle 4-i\rangle \Leftrightarrow n \in 17\mathbb{Z}$
Entonces, para todo $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ es $a+bi = b(4-i)+(a+4b)$, y por el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a+4b = 17q+r$ con $0 \leq r < 17$, por tanto $a+bi = b(4-i)+(a+4b) = b(4-i)+17q+r$ de donde se deduce que $[a+bi]_{\langle 4-i\rangle} = [r]_{\langle 4-i\rangle}$ con $0 \leq r < 17$, por tanto $|\mathbb{Z}[i]/\langle 4-i\rangle| = 17$ y

$$\mathbb{Z}[i]/\langle 4-i\rangle = \{[r]_{\langle 4-i\rangle} : r \in \mathbb{Z} \text{ con } 0 \leq r < 17\}$$

Ejercicio 2

Teniendo en cuenta que el elemento neutro de la suma en $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ es $e_\oplus = -1$ y el elemento identidad es $1_\odot = 0$, se define $\varphi : (\mathbb{R}, \oplus, \odot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot)$ como $\varphi(r) = r+1$. Veamos que es isomorfismo de anillos:

1. $\varphi(r \oplus s) = \varphi(r+s+1) = r+s+2 = (r+1)+(s+1) = \varphi(r)+\varphi(s)$
2. $\varphi(r \odot s) = \varphi(rs+r+s) = rs+r+s+1 = (r+1)\cdot(s+1) = \varphi(r)\cdot\varphi(s)$
3. $\ker(\varphi) = \{r \in \mathbb{R} : r+1 = 0\} = \{-1\} = \{e_\oplus\}$, por tanto φ es inyectiva
4. para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $s = r-1 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s) = s+1 = (r-1)+1 = r$, por tanto φ es suprayectiva

Se deduce que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ son anillos isomorfos.

Ejercicio 3

$f([1]_{12}) \in \{[0]_6, [1]_6, [3]_6, [4]_6\}$

1. Si $f([1]_{12}) = [0]_6$ se tiene que $\ker(f) = \mathbb{Z}_{12}$ y $f(\mathbb{Z}_{12}) = \{[0]_6\}$
2. Si $f([1]_{12}) = [1]_6$ se tiene que $\ker(f) = \{[0]_{12}, [6]_{12}\}$ y $f(\mathbb{Z}_{12}) = \mathbb{Z}_6$
3. Si $f([1]_{12}) = [3]_6$ se tiene que $\ker(f) = \{[0]_{12}, [2]_{12}, [4]_{12}, [6]_{12}, [8]_{12}, [10]_{12}\}$ y $f(\mathbb{Z}_{12}) = \{[0]_6, [3]_6\}$
4. Si $f([1]_{12}) = [4]_6$ se tiene que $\ker(f) = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$ y $f(\mathbb{Z}_{12}) = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$

Ejercicio 4

1. Con manejo algebraico sobre α se obtiene el polinomio $x^4 - 6x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, que es irreducible por el criterio de Eisenstein para $p = 2$, luego es el polinomio mínimo $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ sobre $\mathbb{Q}$
2. Por el apartado anterior sabemos que $[\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}}) : \mathbb{Q}] = 4$.
   Una base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})$ sobre $\mathbb{Q}$ es: $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})} = \{1, \sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{9+3\sqrt{3}}\}$
3. Con manejo algebraico sobre $\beta = \sqrt{3}$ se obtiene el polinomio $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$, que es irreducible por el criterio de Eisenstein para $p = 3$, por tanto es el polinomio mínimo de β sobre $\mathbb{Q}$, de donde se deduce que $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$, por tanto $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Una base de $\mathbb{Q}(\beta)$ sobre $\mathbb{Q}$ es $B_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})} = \{1, \sqrt{3}\} \subset \{1, \sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{9+3\sqrt{3}}\} = B_{\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})}$ por tanto $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{3}})$